Quadratische Funktionen mit Parameter
Übung

1. Betrachtet wird die reelle Funktionenschar: $f_a: x \mapsto ax^2 - 4x + 2$
   mit Defintionsmenge $D = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   a) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters a auf die Form der Graphen von f_a. Zeigen Sie, dass kein Graph der Funktion f_a durch den Koordinatenursprung verläuft.
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts von f_a in Abhängigkeit von a.
   c) Geben Sie die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von a an.
   d) Setzen Sie $a = 2$ und bestimmen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von b) und c) die Nullstellen und die Koordinaten des Scheitelpunkts von f_2.
   e) Zeichnen Sie den Graphen von f_2.
   f) Bestimmen Sie den Bereich, für den die Funktionswerte von f_2 den Wert 8 nicht übersteigen.

2. Betrachtet wird

   $$f_b(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx - 4 \text{ mit Parameter } b \in \mathbb{R}.$$

   a) Zeigen Sie: Jeder der zugehörigen Funktionsgraphen besitzt zwei verschiedene Nullstellen.
   b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts.
   c) Zeichnen Sie den Graphen von f_b für $b = 0$.

3. Gegeben ist die Funktion $f_c(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

   a) Für welche Werte von c besitzt f_c keine Nullstellen?
   b) Geben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede des Funktionsgraphen für verschiedene Werte von c an.
   c) Zeichnen Sie den Graphen G_{f_c} von f_c für $c = 1$ und $c = -4$.

4. Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ haben folgende reellen Parabelscharen keine Nullstellen?

   a) $f_a(x) = ax^2 + x + 1, a \neq 0$
   b) $f_b(x) = -x^2 + x + b - 1$
   c) $f_c(x) = cx^2 - cx + 2c, c \neq 0$

5. Gegeben ist die Parabelschar $f_c(x): x \mapsto c^2x^2 - 2c^2x - x^2 + 2x + 2c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts in Abhängigkeit von c.

Quadratische Funktionen mit Parameter
Lösung

1.

a) Der Parameter a ist der Formfaktor für den Graphen, d.h. die Öffnung der Parabel hängt von ihm ab. Wegen $f_a(0) = 2$ schneidet jeder der Graphen die y-Achse bei $y = 2$ und nicht im Ursprung.

b) $x_S = \frac{-(-4)}{2a} = \frac{2}{a}$

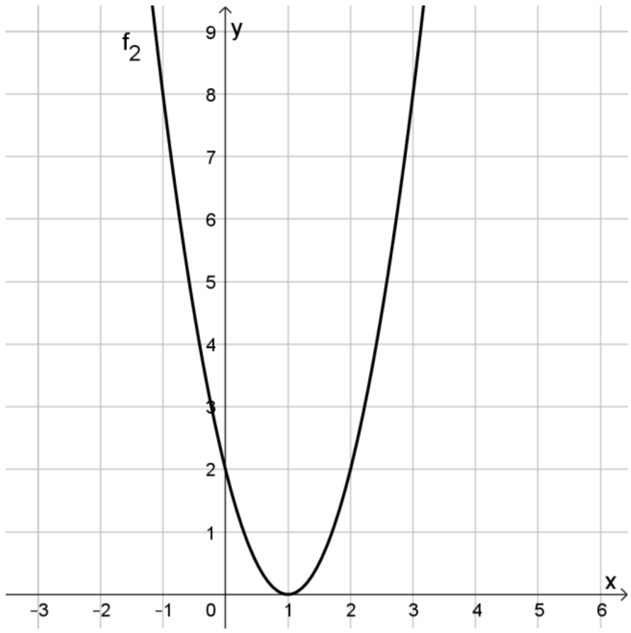
$y_S = f_a\left(\frac{2}{a}\right) = a\left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{a}\right) + 2 = \frac{2a-4}{a}$

c) $D = (-4)^2 - 4 \cdot a \cdot 2 = 16 - 8a$

1. Fall: $a > 2$ $(D < 0)$	2. Fall: $a = 2$ $(D = 0)$	3. Fall: $a < 2$ $(D > 0)$
Keine Nullstellen	Eine (doppelte) Nullstelle	Zwei verschiedene Nullstellen

d) Der Scheitelpunkt $S(1; 0)$ ist mit der (doppelten) Nullstelle identisch.

e)



f) $f_2(x) \leq 8$ für $x \in [-1; 3]$

2.

a) Die Diskriminante der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 + bx - 4 = 0$ beträgt

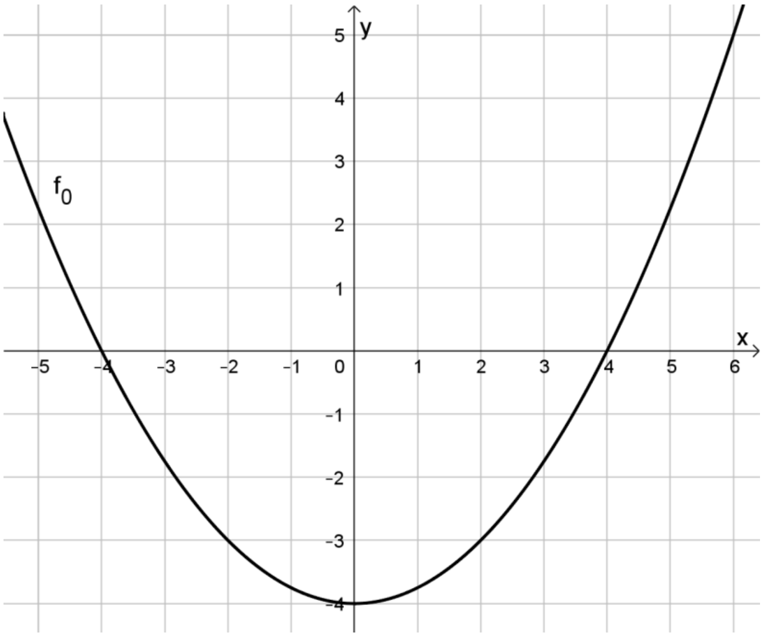
$D = b^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-4) = b^2 + 4$ ist für $b \in \mathbb{R}$ positiv. Es existieren daher immer zwei verschiedene Nullstellen $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2\left(-b \pm \sqrt{b^2 + 4}\right)$.

Hinweis: Die Wurzel mit der Diskriminante kann nicht mehr vereinfacht werden.

b) Der Scheitelpunkt liegt bei $x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{b}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2b$

$y_S = f_b(-2b) = \frac{1}{4}(-2b)^2 + b(-2b) - 4 = -b^2 - 4.$

c)

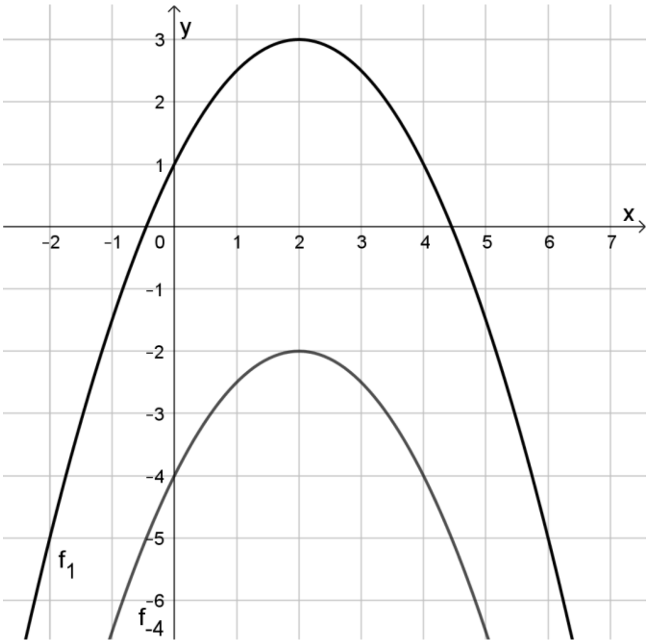


3.

a) $D = 4 + 2c < 0$ für $c > 2$.

b) Die Graphen G_{f_c} besitzen alle dieselbe Form. Sie sind für verschiedene Werte von c lediglich in y-Richtung verschoben.

c)



4.

a) $a > \frac{1}{4}$

b) $b < \frac{3}{4}$

c) Für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5. Ordnen Sie nach Potenzen von x, dann ist $f_c(x) = (c^2 - 1) \cdot x^2 + (2 - 2c^2) \cdot x + 2c$.
Dann ist $x_S = \frac{-(2-2c^2)}{2(c^2-1)} = \frac{2(c^2-1)}{2(c^2-1)} = 1$
$y_S = f_c(1) = -c^2 + 2c + 1$, also ist $S(1; -c^2 + 2c + 1)$